

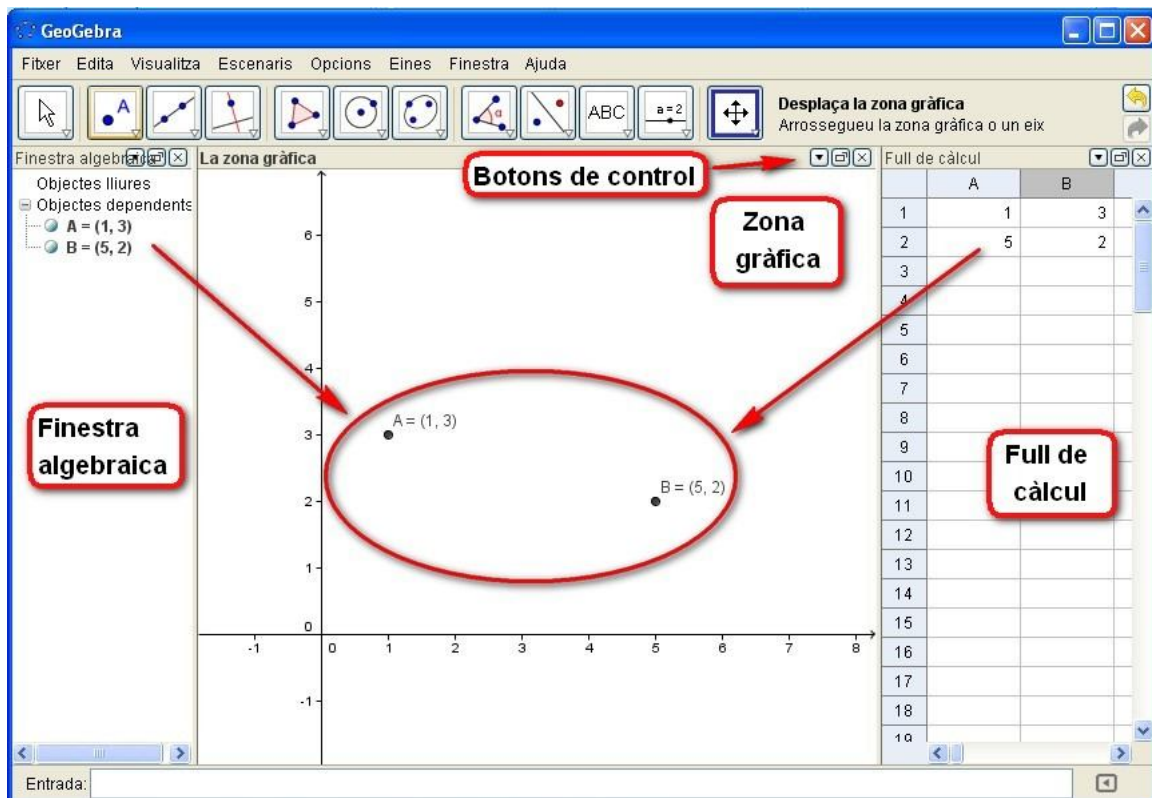
**Fase 3 - Bloc 4 - Activitat 2**

Introducció al GeoGebra

El primer pas que haurem de fer és obrir el GeoGebra 4. Si encara no el teniu hi podeu accedir des de l'apartat descàrregues de la [pàgina oficial del GeoGebra](#) amb dues opcions:

- **Webstart:** fa una petita instal·lació al vostre ordinador que també permet treballar sense connexió a Internet.
- **Applet Start:** s'obre una miniaplicació de GeoGebra en línia totalment operativa en el vostre navegador.

Una vegada obert veurem que **GeoGebra** ofereix la possibilitat de mostrar els objectes matemàtics en tres parts diferents de la pantalla: a la **Finestra algebraica**, a la **Zona gràfica** i al **Full de càlcul**. Totes les representacions del mateix objecte es vinculen dinàmicament i s'adapten automàticament als canvis fets en qualsevol de les parts, independentment de la forma en què inicialment han estat creats.





En cadascuna de les parts podreu trobar els botons de control que ens permeten configurar-la de forma ràpida, obrir-la en una finestra nova o tancar-la si no l'hem d'utilitzar (també es pot fer des del menú Visualitza on trobarem més opcions).

Totes les eines que ens ofereix el **GeoGebra** estan agrupades en menús desplegable que ens faciliten la seva utilització:



Per ordre: eines de moviment, eines de punts, eines de rectes, eines de construcció de rectes especials, eines de polígons, eines de cercles i arcs, eines de còniques, eines de mesura, eines de transformacions geomètriques, eines d'objectes especials, eines d'objectes d'acció i eines generals.

És interessant de bon principi configurar les opcions de visualització de l'arxiu de treball. En el nostre cas tancarem el Full de càlcul i a la zona gràfica desactivarem els eixos clicant el botó de control  i després .

Una vegada ho tinguem tot a punt podem iniciar les nostres construccions.

La millor manera de conèixer algunes de les possibilitats que ens ofereix el **GeoGebra** és aprendre fent i per tant us proposem resoldre les activitats següents.


### **Activitat 1:**

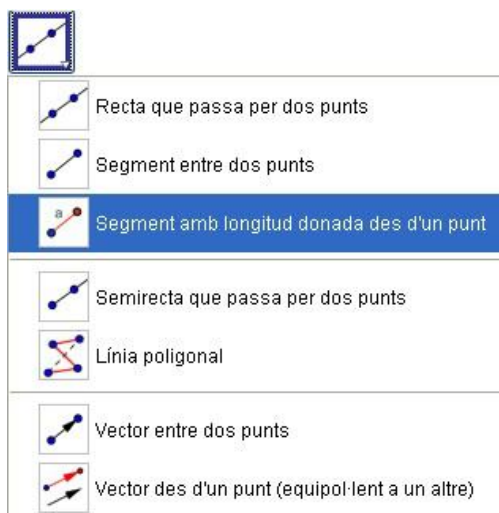
**Construeix un triangle els costats del qual mesuren 5 cm, 7 cm i 9 cm respectivament. Calcula el seu perímetre i la seva àrea.**

Podríem resumir la feina a fer per resoldre el problema en els punts següents:

- construir un dels costats del triangle,
- trobar el tercer vèrtex del triangle com a intersecció de circumferències amb radi la longitud dels altres dos costats,
- construir el triangle,
- calcular el perímetre i l'àrea del triangle.

En primer lloc, tal com faríem amb regla i compàs, construirem un dels costats del triangle amb la

comanda **Segment amb longitud donada des d'un punt**  (del menú eines de rectes).



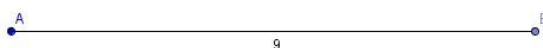
Una vegada hem clicat damunt un botó d'ordre aquest es destaca en color blau i a la part superior dreta de la pantalla apareix un text explicatiu amb el procés per dur a terme l'acció triada.

**Segment amb longitud donada des d'un punt**  
Seleccioneu un punt i introduïu la longitud del segment

Clicarem a la pantalla gràfica per construir el primer vèrtex del triangle i ens demanarà la longitud del costat, en el nostre cas iniciarem la construcció pel costat més llarg.



El resultat hauria de ser:



En clicar damunt la zona gràfica es crea el punt A, el punt B i els segment AB, i al mateix temps a la finestra algebraica es crea també els punts A i B indicant-nos les seves coordenades i el segment a, del qual veurem la longitud.



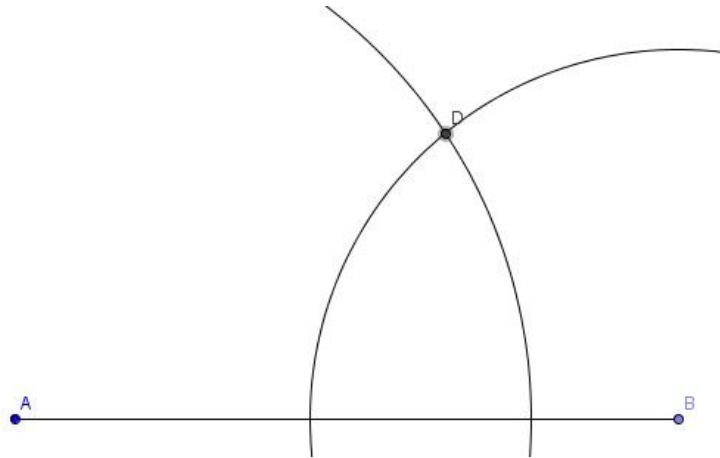
Seleccionant el **Punter** (del menú eines de moviment) podem moure els punts A i B fins al lloc desitjat de la zona gràfica, de manera que les seves coordenades es van actualitzant dinàmicament a la finestra algebraica.



A continuació, amb la comanda **Circumferència donats el centre i el radi** (del menú eines de cercles i arcs) dibuixarem la circumferència de centre el punt A i radi 7 cm. Repetint el procés dibuixarem la circumferència de centre el punt B i radi 5 cm. La intersecció d'aquestes dues circumferències ens donarà el tercer vèrtex del triangle. Construirem el vèrtex amb la comanda

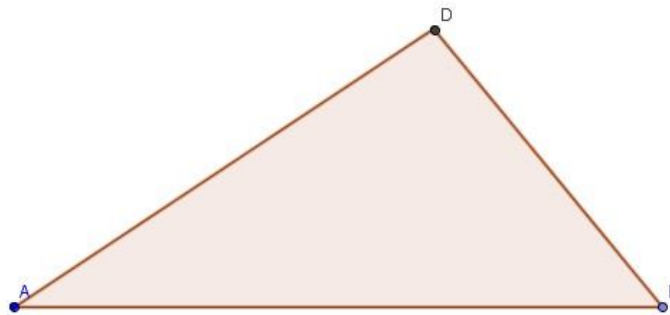


**Intersecció de dos objectes** (del menú eines de punts).



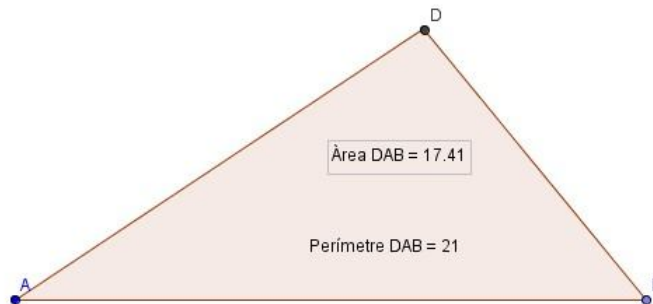
Tot seguit, construirem el triangle de vèrtexs A, B i D amb la comanda **Polígon** (del menú eines de polígons).

En els diferents passos d'una construcció s'utilitzen elements auxiliars que possiblement no utilitzarem més. Per tal de netejar la pantalla d'aquestes construccions auxiliars les podem amagar de dues maneres diferents: clicant damunt aquest element amb el botó dret i desactivant l'opció **Mostra objecte** per amagar-lo o clicant damunt el punt blau corresponent a l'expressió algebraica d'aquest element de la finestra algebraica. Per exemple, arribats a aquest punt, podem amagar les dues circumferències i el punt C de manera que ens quedi només el triangle.



Finalment per calcular el perímetre i l'àrea del triangle utilitzarem les comandes **Longitud**,

**perímetre o distància**  i la comanda **Àrea**  (del menú eines de mesura).



## Activitat 2

Volem construir una diana amb zones concèntriques de quatre colors diferents de manera que totes les zones tinguin la mateixa superfície.


Podríem resumir la feina a fer per resoldre l'activitat en els punts següents:

- construir la circumferència inicial que delimita la diana,
- trobar el radi de les tres circumferències que ens delimitaran les diferents zones de colors,
- construir aquestes circumferències,
- presentar tota aquesta informació.


Ja en el **GeoGebra**, el primer que haurem de construir és la circumferència que delimita la nostra

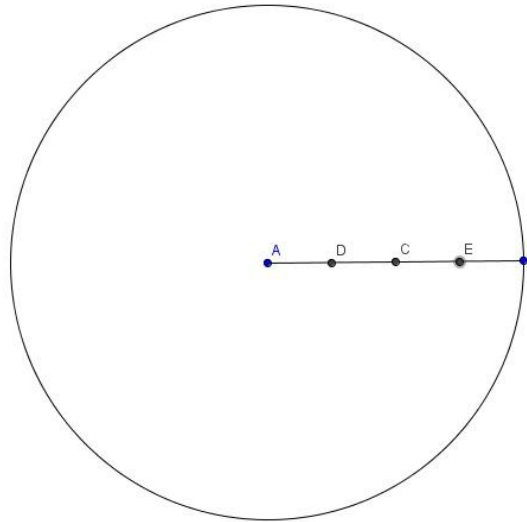
diana amb la comanda **Circumferència donats el seu centre i un punt per on passa**  (del

menú eines de cercles) o amb la comanda **Circumferència donats el centre i el radi**  (del menú eines de cercles i arcs).

El segon pas serà crear el segment AB amb la comanda **Segment entre dos punts**  (del menú eines de rectes), que representa un radi de la circumferència inicial, per posteriorment dividir-lo en quatre parts iguals.

En aquest cas particular per fer la divisió del segment AB podem utilitzar l'eina **Punt mitjà o centre**

 (del menú eines de punts). En primer lloc crearem el punt C que serà el punt mitjà del segment AB. Després crearem el punt D com a punt mitjà dels punts A i C (clicant el botó de comanda i després el punt A i el punt C) i, de forma anàloga, el punt E com a punt mitjà dels punts C i B.



A continuació, hem de dibuixar una semicircumferència que tingui per diàmetre el radi de la circumferència inicial. Ho podem fer amb la comanda **Semicircumferència donats els extrems del**



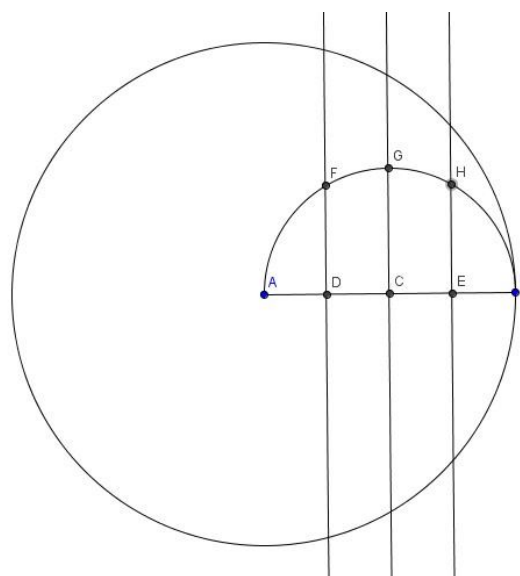
**diàmetre** (del menú eines de cercles) i, posteriorment, dibuixarem les rectes perpendiculars al radi que passen pels punts amb què l'hem dividit en quatre parts iguals (D, C i E) amb la



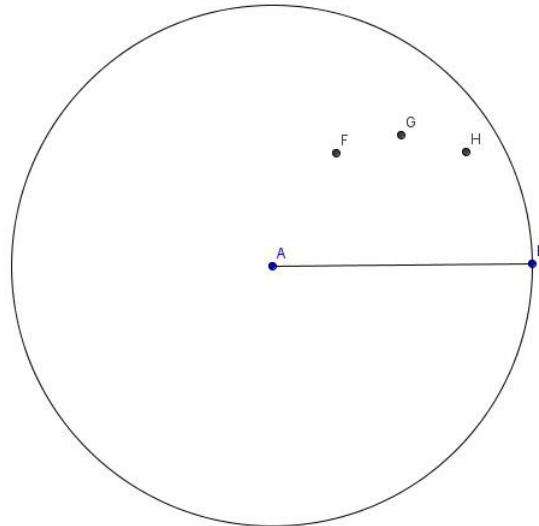
comanda **Recta perpendicular** (del menú eines de construcció de rectes especials). La intersecció d'aquestes rectes amb la semicircumferència ens donarà punts que pertanyen a les circumferències buscades. Per dibuixar-los utilitzarem la comanda **Intersecció de dos objectes**




(del menú eines de punts).

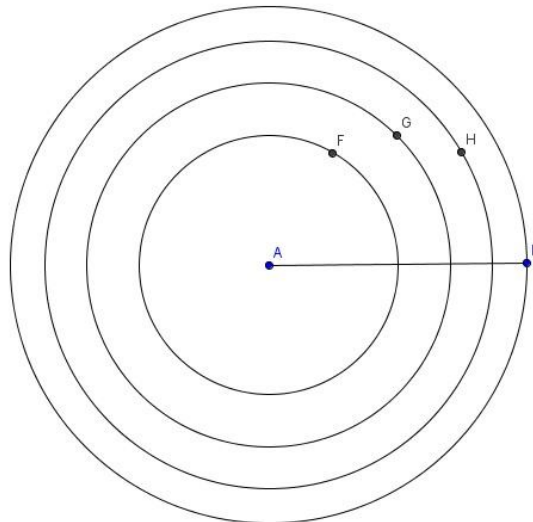


Arribats a aquest punt podem amagar totes les construccions auxiliars que no necessitem: la semicircumferència de diàmetre AB, els punts D, C i E i les rectes perpendiculars al radi que passen per aquests punts.



Finalment, només ens queda dibuixar les circumferències de centre el punt A i que passen pels punts H, G i F, respectivament, amb el botó d'ordre **Circumferència donats el seu centre i un**

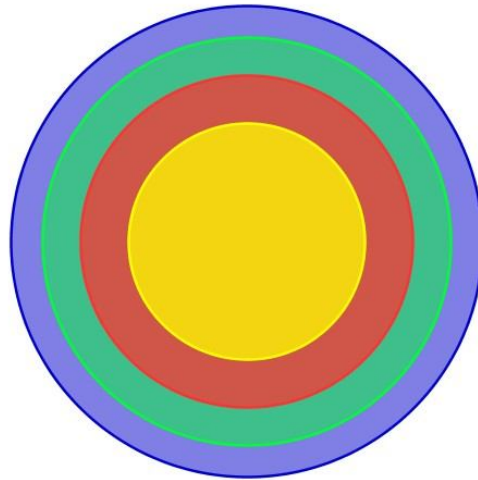
**punt per on passa** , que ja hem vist anteriorment.



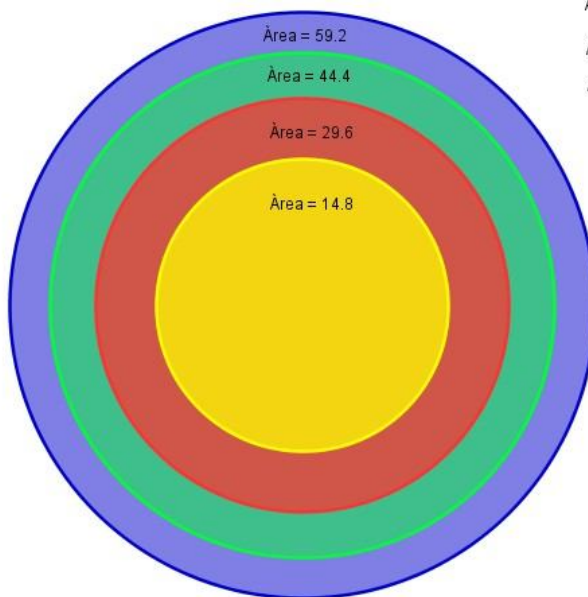
Per millorar la presentació final, amagarem els punts A, B, F, G, H i el segment AB i pintarem les diferents zones de la diana amb els colors desitjats.

Per canviar el color i l'aspecte clicarem damunt de cada cercle amb el botó dret i triarem el color i l'estil de cadascun d'ells (en aquest exemple s'ha triat, a la pestanya estil, 5 punts de gruix de línia i l'opacitat del 75%).





Utilitzant la comanda **Àrea**, que ja hem vist anteriorment, i fent uns petits càlculs podem comprovar que les quatre zones tenen exactament la mateixa superfície.



Àrea Groga = 14.8 unitats quadrades

Àrea vermella = 29.6 - 14.8 = 14.8 unitats quadrades

Àrea verda = 44.4 - 29.6 = 14.8 unitats quadrades

Àrea Blava = 59.2 - 44.4 = 14.8 unitats quadrades

A partir d'aquí podem deixar investigar l'alumnat, per exemple veient què passa amb la construcció si modifiquem el punt B inicial o proposant noves versions de diana. També es pot comprovar que

en el cas general les circumferències que delimiten les  $n$  diferents zones tenen radis  $r_i = r\sqrt{\frac{i}{n}}$

$i = 1, \dots, n-1$



### **Activitat 3:**

A continuació, i per ampliar una mica més us proposem resoldre amb GeoGebra el problema següent (18è problema dels Desafios matemáticos del diari EL PAÍS):

***Fa molts segles un petit grup d'avantpassats nostres buscaven un lloc adequat on establir-se i formar un poblat. Així van descobrir un magnífic territori pla en forma de triangle equilàter de 10 km de costat. Era un territori ple de possibilitats:***

***Al llarg d'un dels costats del triangle corria un riu tranquil i cristal·lí on podien agafar aigua i pescar. Un altre dels costats s'obria en tota la seva longitud a una sabana on es podien caçar bones peces. El tercer costat limitava completament amb un terreny fèrtil que es podia cultivar.***

***Feliços amb el descobriment es van establir en un punt de la vasta planura triangular i van construir tres camins que unien el poblat amb cadascun dels costats. Cada camí unia el poblat amb un dels costats en línia recta, de manera que el trajecte era el més curt possible.***

***I varen començar a viure segons els seus ancestrals costums. Cada dia, a l'alba, es dirigien al riu a buscar aigua i, si la sort els acompanyava, algun peix per menjar. De tornada al poblat canviaven els càntrics pels arcs i les fletxes i recorrien el camí fins al límit de la sabana per caçar alguna presa que portaven al poblat amb la conseqüent alegria de tothom.***

***A la foguera cuinaven el que havien caçat. Després de menjar, i abans del trajecte vespertí, descansaven una mica. A la tarda anaven a les zones de cultiu per a dur a terme els treballs agrícoles. Al capvespre tornaven al poblat duent, en ocasions, el fruit de les seves senzilles collites.***

***Es tractava d'una vida tranquil·la que només tenia l'inconvenient de les llargues caminades d'anada i tornada en línia recta pels camins fins al riu, la sabana i els cultius. Pas a pas, ni molt a poc a poc ni molt de pressa, a una velocitat constant de 5 km/h, cada dia recorrien els tres camins que els asseguraven l'aliment. Eren feliços i vivien en pau... encara que de vegades se sentien cansats de tant caminar.***


***Podríeu dir quantes hores del dia invertien a recórrer aquests camins?***

Si l'haguéssim de resoldre amb llapis i paper podria presentar un cert grau de dificultat però veurem que si aprofitem les diferents opcions que ens ofereix el GeoGebra podem arribar al resultat d'una manera prou senzilla.

Podríem resumir la feina a fer per resoldre el problema en els punts següents:

- construir el triangle que representa el territori,
- dibuixar un punt on situaríem el poblat dintre d'aquest territori,
- construir els camins que ens porten al riu, a la sabana i a la zona cultivable,
- fer les mesures i els càlculs adients,

- presentar tota aquesta informació.


Per tal de dibuixar el triangle que representa el territori en forma triangular iniciarem la construcció amb la creació d'un punt inicial amb la comanda **Punt nou**  (del menú eines de punts).

El segon pas serà crear un dels costats del triangle equilàter de mesura 10 km amb la comanda


**Segment amb longitud donada des d'un punt**  (del menú eines de rectes).

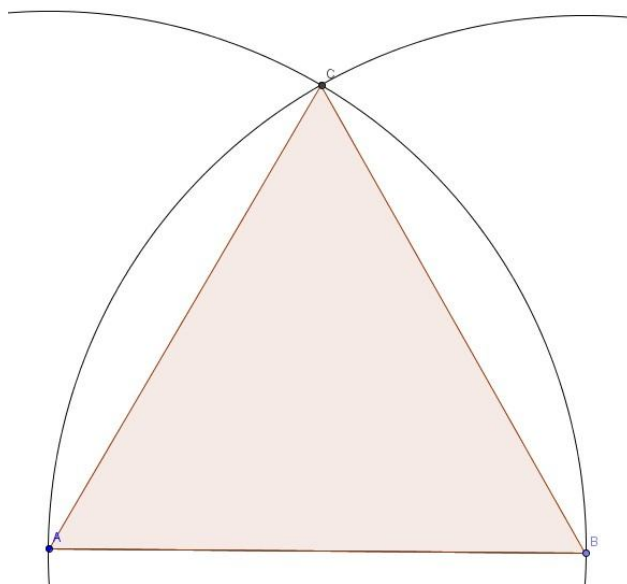
A la finestra algebraica s'hi haurà creat el punt B dintre de la categoria d'objectes dependents i també el segment a amb la seva longitud. En ser B un objecte dependent ha de complir sempre la/les condicions imposades per la construcció, que en el nostre cas és  $d(A,B)=10$ , i per tant no el podrem moure lliurement per tota la zona gràfica, només el podrem situar en les posicions que compleixin aquesta condició.

Ara només ens queda acabar de construir el triangle equilàter, com si ho féssim amb regla i

compàs. Amb la comanda **Circumferència donat el centre i un punt per on passa**  (del menú d'eines de cercles i arcs) dibuixarem les dues circumferències de centre un dels extrems del segment i que passa per l'altre extrem del segment. Tot seguit amb la comanda **Intersecció de dos**

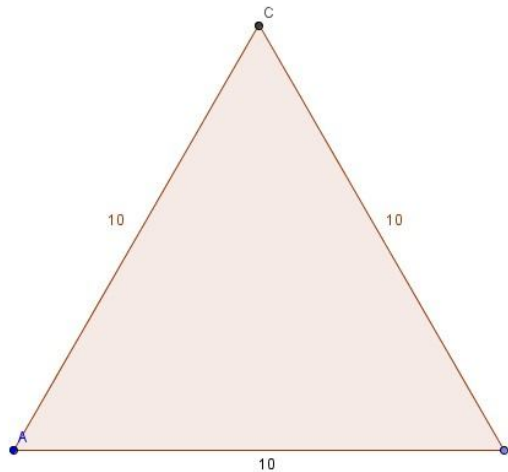
**objectes**  (del menú eines de punts) obtindrem, per intersecció de les dues circumferències

creades en el pas anterior, el tercer vèrtex del triangle i finalment amb la comanda **Polígon**  (del menú eines de polígons) construirem el triangle equilàter de vèrtexs A, B i C.

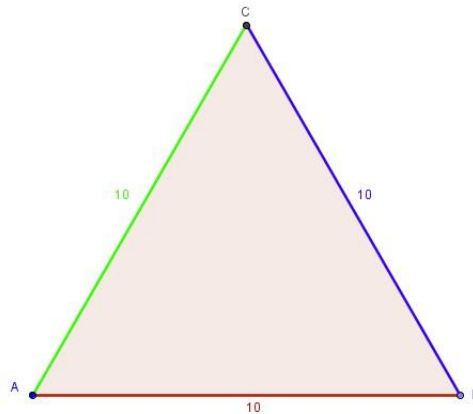


A continuació, amagarem els objectes secundaris que hem fet servir per fer la construcció i que no necessitarem més endavant.


Per altra banda, podem visualitzar la mesura de cadascun dels costats del triangle clicant damunt de cada costat del triangle amb el botó dret i seleccionant l'opció Propietats -> Mostra etiqueta-> Valor.



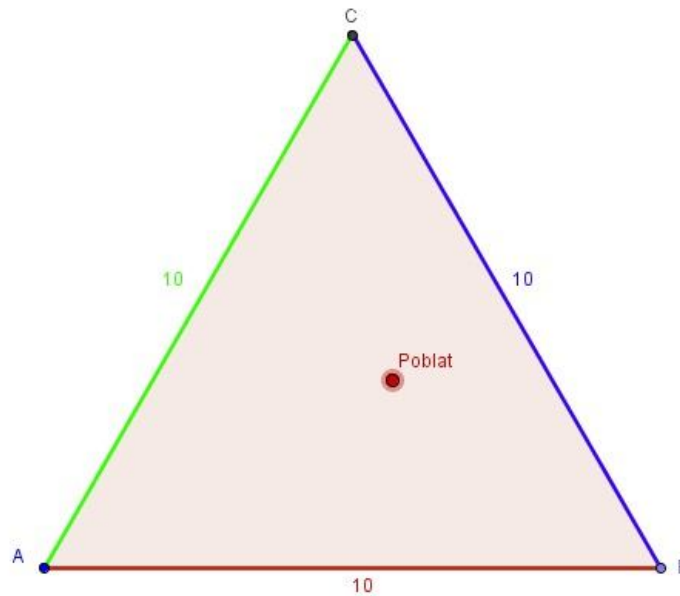
També podem canviar l'aparença de cada costat del triangle per representar el riu, la sabana i el terreny fèrtil amb diferents colors (Propietats -> Pestanyes color i estil). En aquest cas el fet de personalitzar cada element pot ajudar l'alumnat a entendre millor el que representa cada costat del triangle.



Ara ja tenim representat el territori pla en forma de triangle equilàter de 10 km de costat. Per

representar el poblat dintre d'aquest territori utilitzarem l'eina **Punt en un objecte**  (del menú eines de punts). Això ens permetrà moure el punt que representa el poblat dintre del triangle sense que en puguem sortir.


Una vegada creat, des de les diferents pestanyes i opcions de *propietats* li podem canviar el nom, el color i l'estil .




A partir d'aquí, tenim diferents opcions per arribar a la solució: dibuixar els diferents camins i utilitzar les seves longituds per als càlculs finals o directament utilitzar l'eina distància entre dos objectes de les eines de mesura. En aquest cas utilitzarem la primera opció per visualitzar-ho millor.

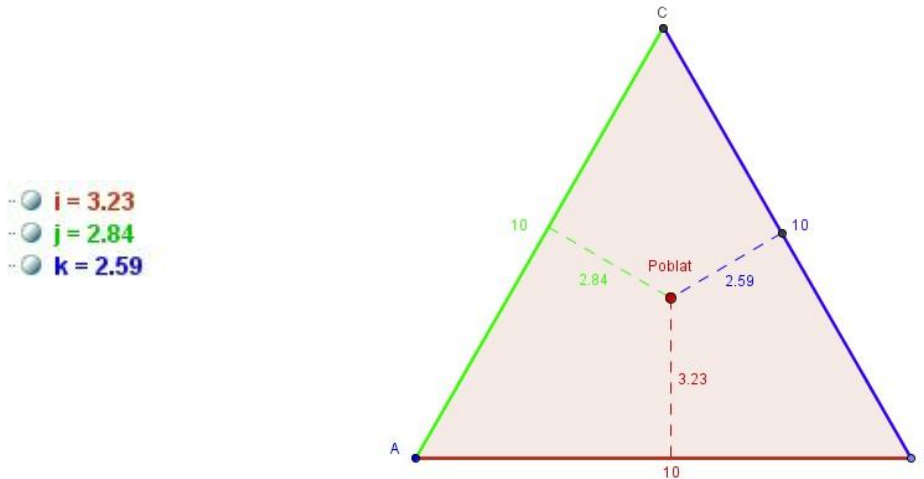
Si hem de construir el camí recte més curt a cadascuna de les zones, haurem de construir el segment perpendicular a cada costat del triangle que té per extrems un punt del costat del triangle i el punt que representa el poblat. Així, dibuixarem la recta perpendicular a cada costat que passa pel

Poblat amb la comanda **Recta perpendicular** , trobarem el punt d'intersecció de la nova

recta amb el costat del triangle amb la comanda **Intersecció de dos objectes**  i finalment construirem el segment entre aquests dos punts amb la comanda **Segment entre dos punts**

 que representarà el camí. Després d'amagar els elements que no necessitem podem personalitzar l'aparença de cadascun dels camins i mostrar la seva longitud.

A la finestra algebraica cada element de la nostra construcció hi té assignat el seu nom i el mateix color que l'element corresponent a la zona gràfica. En el cas dels segments que representen els nostres camins la finestra algebraica ens dóna el nom i la seva longitud.



$i = 3.23$   
 $j = 2.84$   
 $k = 2.59$

Una vegada coneixem la longitud dels camins podem utilitzar les mesures que ens dona el **GeoGebra** i acabar els càlculs manualment o amb calculadora, o també tenim l'opció d'utilitzar els textos dinàmics que ens ofereix aquesta versió del **GeoGebra** per fer-los directament. L'avantatge que ens proporciona aquesta opció és que ens anirà recalculant dinàmicament totes les dades en funció de les modificacions que anem fent a la nostra construcció.



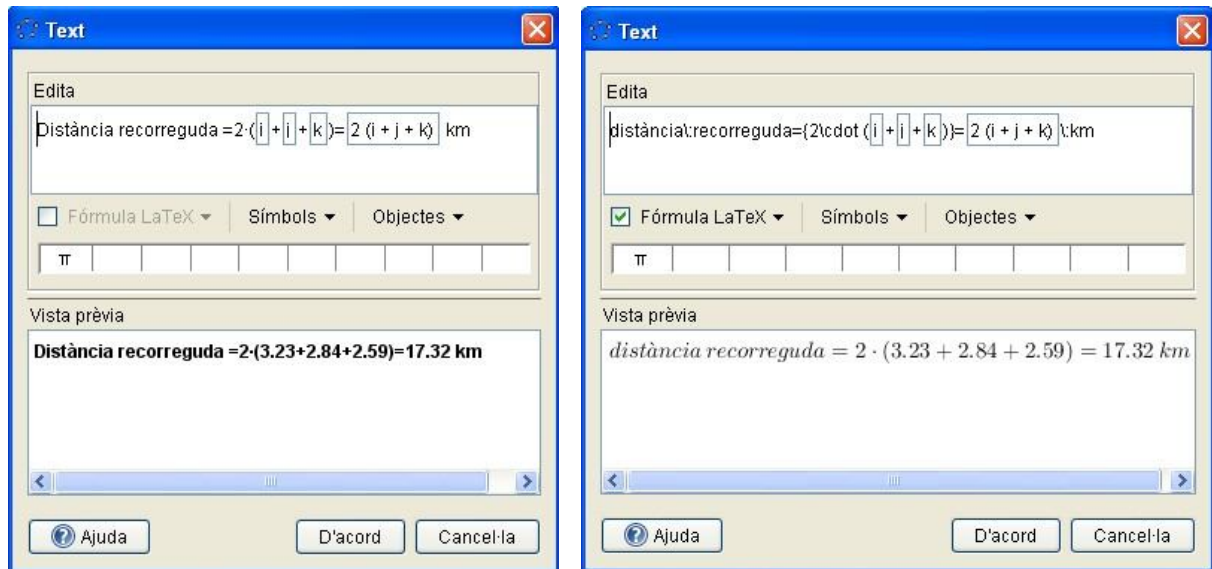
Insertarem un quadre de text amb l'eina Insereix text (del menú eines per a objecte especials). Marcant al lloc on volem el text de la zona gràfica s'obre la finestra següent:



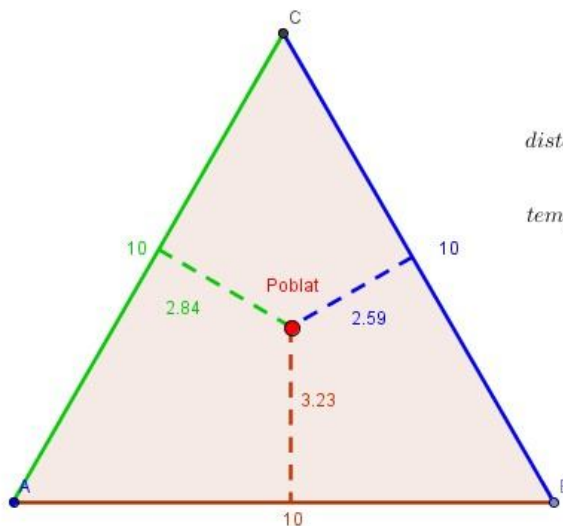
En la primera subfinestra anomenada **Edita** podem escriure el text desitjat com si fos un editor de text. Cada vegada que vulguem que el Geogebra agafi el valor d'un objecte determinat haurem de clicar damunt del desplegable Objectes i seleccionar el nom de l'objecte que volem utilitzar. Al seleccionar-lo apareix el nom dintre d'un petit requadre blau la qual cosa indica que en cada moment utilitzarà el valor d'aquest objecte per fer els càlculs.

Si volem el càlcul del resultat final només cal que inserim un dels objectes i manualment el càlcul dintre dels requadre d'aquest objecte.

Així, en el primer exemple, el càlcul de la distància recorreguda diàriament, tenim inicialment els càlculs indicant cada valor i finalment el valor resultant. A la pantalla vista prèvia veurem el resultat del nostre text dinàmic (també tenim l'opció d'entrar el text en format LaTeX per obtenir una presentació més acurada. En aquest cas cal activar l'opció Fòrmula LaTeX i podem utilitzar l'ajuda que ens ofereix aquest menú desplegable per editar el text desitjat).



El resultat final de la nostra activitat representada i resolta íntegrament amb GeoGebra serà:



$$\text{distància recorreguda} = 2 \cdot (3.23 + 2.84 + 2.59) = 17.32 \text{ km}$$

$$\text{temps emprat} = \frac{\text{distància recorreguda}}{\text{velocitat}} = \frac{17.32 \text{ km}}{5 \text{ km/h}} = 3.46 \text{ h}$$

Una vegada tenim el fitxer acabat podem desar-lo com arxiu de GeoGebra (.ggb), compartir-lo amb la resta d'usuaris de GeoGebra enviant l'arxiu directament al GeoGebraTube o exportar-lo a format web o a format gràfic.

Com a complement d'aquesta darrera activitat podeu mirar el vídeo publicat a El País on s'exposa la solució del problema emprant dues construccions de GeoGebra força més elaborades (Experimentació i Demostració). Una altra demostració diferent amb GeoGebra por ser [aquesta](#).

Després d'aquesta petita introducció al **GeoGebra** on hem fet un tastet d'algunes de les opcions que ens ofereix, necessitarem practicar per anar descobrint poc a poc totes les seves opcions. Per fer-ho d'una manera més guiada us recomanem consultar els materials del curs telemàtic del Departament d'Ensenyament D55 – Matemàtiques amb GeoGebra (J. Bartrolí, P. Bujosa, A. Gomà).

En l'apartat següent explorarem reculls de recursos construïts amb GeoGebra als quals podem accedir a través de la xarxa.